



Schulinterner Lehrplan zum Kernlehrplan für die
gymnasiale Oberstufe

Mathematik

(Stand: 22. Juli 2024)

Leibniz Gymnasium Gelsenkirchen-Buer



Inhaltsverzeichnis

1. Die Fachgruppe Mathematik am Leibniz Gymnasium.....	3
2. Entscheidungen zum Unterricht.....	5
2.1 Unterrichtsvorhaben	5
2.1.1 Abfolge der Unterrichtsvorhaben	6
2.1.2 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben	7
Einführungsphase.....	7
Qualifikationsphase Grundkurs Q1 (in Arbeit)	16
Qualifikationsphase Grundkurs Q2 (in Arbeit)	16
Qualifikationsphase Leistungskurs Q1 (in Arbeit)	16
Qualifikationsphase Leistungskurs Q2 (in Arbeit)	16
2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit.....	17
2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung.....	18
2.4 Lehr- und Lernmittel.....	22
3. Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans	23



1. Die Fachgruppe Mathematik am Leibniz Gymnasium

Das Leibniz Gymnasium ist eines von sechs städtischen Gymnasien in Gelsenkirchen. Es liegt im Innenstadtbereich im Stadtteil Buer und hat eine entsprechend heterogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Das Einzugsgebiet erstreckt sich über das gesamte Stadtgebiet. Das Leibniz Gymnasium ist in der Sekundarstufe I vier- bis fünfzünftig und wird als Halbtagsgymnasium geführt.

In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig Schülerinnen und Schüler neu aufgenommen, überwiegend aus Realschulen der Stadt. Eine Fördermöglichkeit aller Schülerinnen und Schüler der Einführungs- und Qualifikationsphase besteht in der Teilnahme an Vertiefungskursen, die halbjährig in den Kernfächern angeboten und in denen grundlegende Aspekte des Faches aufgearbeitet und geübt werden.

In der Regel werden in der Einführungsphase vier bis fünf parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Qualifikations-Phase ein bis zwei Leistungs- und dementsprechend drei bis vier Grundkurse entwickeln.

Der Unterricht findet im 45-Minuten-Takt statt, die Kursblockung sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet:

Durch ein fachliches Förderprogramm unter Einbeziehung von Schülerinnen und Schülern als Tutoren, begleitet durch regelmäßige Sprechstunden der Lehrkräfte und dort getroffene Lernvereinbarungen, werden Schülerinnen und Schüler mit Übergangs- und Lernschwierigkeiten intensiv und aktiv unterstützt.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben im Fach Mathematik angehalten und, wo erforderlich, begleitet. So findet regelmäßig eine Teilnahme der Schüler(innen) am Känguru-Wettbewerb Mathematik statt. Zudem nehmen viele am Bolyai-Wettbewerb teil. Da es sich hierbei um einen Wettbewerb handelt, an dem die Schülerinnen und Schüler in Gruppen teilnehmen, wird insbesondere auch Kommunikationskompetenz gefördert. Zur Teilnahme an weiteren Wettbewerben, wie der Mathematik Olympiade, dem Bundeswettbewerb Mathematik oder dem Matheturnier der Uni Köln/Bonn wird gesondert ermuntert.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass, wo immer möglich, mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden. Für die Sekundarstufe I werden dazu verbindliche Absprachen mit anderen Fachgruppen, wie z. B. Geographie, Politik und Biologie erarbeitet. Besonders eng ist die Zusammenarbeit mit der Fachgruppe Physik, da es hier eine relativ große Schnittmenge der unterrichtenden Lehrkräfte der Fächer gibt.

In der Sekundarstufe II kann verlässlich darauf aufgebaut werden, dass die Bearbeitung von kontextbezogenen Aufgaben im Mathematikunterricht bekannt ist.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt und der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule unter anderem zwei PC-Unterrichtsräume zur Verfügung. Einen weitaus wesentlicheren Anteil machen aber die schuleigenen iPads aus, die jede/r Schüler/in zu Beginn der Schulzeit ausgeliehen bekommt. In Verbindung mit Smartboards und



Computern in jedem Klassenraum garantiert dies einen unkomplizierten Einsatz der für den Mathematikunterricht sinnvollen Programme. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten, die diese digitalen Werkzeuge bieten, vertraut sind und diese im Unterricht eingesetzt werden können.

Ab der Einführungsphase wird die App GeoGebra Rechner Suite als modulares Mathematiksystem (MMS) eingesetzt, sodass diese den Schülerinnen und Schülern als Hilfsmittel in den Klausuren der Sekundarstufe II zur Verfügung steht.

Die Fachgruppe Mathematik arbeitet gemeinschaftlich und kontinuierlich an den vielen verschiedenen Teilen des "mathematischen Schullebens". Dabei werden anfallende Aufgaben verteilt und in einem Arbeitsplan dokumentiert, der als Gestaltungsfaden der Fachkonferenzarbeit angesehen wird.

Die Fachschaft Mathematik versucht, vorhandene Stärken in Form von kooperativer Gestaltung von Unterrichtsvorhaben und kollegialem Austausch auf organisatorischer und fachlicher Ebene auszunutzen. Erweitert wird dies durch den Besuch von Fortbildungen, deren Einflüsse in die Fachgruppe weitergegeben werden.

2. Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Abfolge der Unterrichtsvorhaben und der Konkretisierung ebendieser.

In der „Abfolge der Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I, II und III der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben IV bis VIII der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen. Die Reihenfolge der Unterrichtsvorhaben der Qualifikationsphase ist für die Kollegen verbindlich, da die zeitliche Abfolge mit anderen Fächern abgestimmt ist.

Das Übersichtsraaster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Inhaltsfeldern zu verschaffen. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung und Binnendifferenzierung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraaster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.2) empfehlenden Charakter. Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung an unserer Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind.

Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase	
E-A1: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen	
E-A2: Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern	
E-A3: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate	
E-A4: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen	
E-G1: Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen	
E-G2: Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum	
Grundkurs Q1	Leistungskurs Q1
GK-A1: Optimierungsprobleme	LK-A1: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern
GK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS)	LK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS)
GK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand	LK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand
GK-A4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen	LK-A4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
GK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	LK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen
GK-G2: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform	LK-G2: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen
GK-G3: Untersuchungen an geometrischen Körpern	LK-G3: Parametrisierung von Ebenen
	LK-G4: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten
	LK-G5: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder
	LK-G6: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen
	LK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion
Grundkurs Q2	Leistungskurs Q2
GK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	LK-A6: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen
GK-A6: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	LK-A7: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln
GK-A7: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	LK-A8: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen
GK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	LK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
GK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung	LK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung
GK-S3: Änderungen und Auswirkungen - Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen	LK-S3: Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen
	LK-S4: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen
	LK-S5: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen

2.1.2 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben I: Funktionen – Bekanntes und Neues (E-A1)

(Zeitbedarf: ca. 14 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ~~ganzzahlige Funktionen~~, trigonometrische Funktionen
- Eigenschaften von Potenzfunktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten
- (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
- (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (~~ganzzahlige Funktionen~~, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
- Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Möglichkeiten zur Umsetzung:

Die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden mithilfe eines MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und erklärt. Die Kompetenzen im Bereich der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und (lokale) Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und anschaulich diskutiert. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechenverfahren der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Materialhinweis:

- Material „EF-A1 Funktionsuntersuchung mit dem MMS“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben II: Ganzrationale Funktionen (E-A2)

(Zeitbedarf: ca. 14 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ~~Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten~~, ganzrationale Funktionen, ~~trigonometrische Funktionen~~
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.
- (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, ~~Sinusfunktion~~) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,

- erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
- Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathemathikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Möglichkeiten zur Umsetzung:

Der entdeckende Einstieg in das Thema mithilfe eines MMS erfolgt mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“), bei dem die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert wird. Die Transformationen (Verschiebung und Streckung jeweils in Richtung beider Achsen) werden anknüpfend an eine Systematisierung und ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform) auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Erweitert wird das Thema der Transformationen noch um die Spiegelungen an den Koordinatenachsen. Bei Transformationen ganzzahliger Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und graphische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend ein MMS verwendet.

Materialhinweis:

Material „EF-A2 Beschreibung periodischer Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben III: Ableitung - Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), ~~Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte~~

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,

- (6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
- (7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$,
- (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
- (11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
- (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- (14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
 Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
 Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
 Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
 Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
 Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
 Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
 Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
 Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
 Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
 Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
 Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
 Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
 Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
 Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
 Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit
 Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
 Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
 Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
 Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
 Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
 Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Möglichkeiten zur Umsetzung:

In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, ...) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet,

berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall-, Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen sollen auch Steigungen und Steigungswinkel in realen Sachkontexten (z.B. Brückenbögen, Gebäudeteile, Trassenführungen, Seilbahnen) betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät (z.B. mithilfe eines Lasers) ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Ein MMS wird zur numerischen und graphischen Darstellung des Grenzüberganges von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den in der SI aufgebauten Vorstellungen problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limeschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Um die Ableitungsregel für (höhere) natürliche Potenzen zu vermuten, nutzen die Schülerinnen und Schüler ein MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert hier besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.

Anhand von innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

<p>Unterrichtsvorhaben IV: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)</p>
--

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Differentialrechnung: ~~Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel)~~, Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
- (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- (14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
- (15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
- (18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,

(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
- Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
- Kom-(12) nehmen zu mathemathikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Möglichkeiten zur Umsetzung:

Die Beschäftigung mit ganzrationalen Funktionen vom Grad größer gleich drei erfordert auf der rechnerischen Ebene die Anwendung der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der beiden Graphen, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und den Nullstellen ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der möglichen Fälle bezogen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung vertieft untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.

Ausgehend von graphischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

<p>Unterrichtsvorhaben V: Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1)</p>
--

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- (2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,

- (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen ~~und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,~~
- (4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
- (5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
- (6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Möglichkeiten zur Umsetzung:

Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen graphisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Kanten) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Materialhinweis:

- Die Koordinatisierung des Raumes kann z.B. gewinnbringend im Kontext einer Spidercam-Steuerung entwickelt bzw. vertieft werden. (vgl. SINUS-Materialien zur Spidercam

Vernetzung:

Physik: Kräfte und ihre Addition

Unterrichtsvorhaben VI: Geraden und Bewegungen im Raum (E-G2)
--

(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (3) ~~deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und~~ in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- (7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- (8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- (9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- (10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- (11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- (12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

- Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
- Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Möglichkeiten zur Umsetzung:

Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z.B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3×2 -Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die SuS herstellen, wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur zwei Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird ein MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gauß-Algorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt.

Summe Einführungsphase: 120 Stunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 91 Stunden

Die folgenden Unterrichtsvorhaben werden bis zu Beginn des Schuljahres 2025/26 von den Mitgliedern der Fachkonferenz Mathematik erarbeitet, sodass sie für den ersten Durchgang der Q1 zur Verfügung stehen.

Qualifikationsphase Grundkurs Q1 (in Arbeit)

Qualifikationsphase Grundkurs Q2 (in Arbeit)

Qualifikationsphase Leistungskurs Q1 (in Arbeit)

Qualifikationsphase Leistungskurs Q2 (in Arbeit)

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die Grundsätze 1 bis 15 auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind, die Grundsätze 16 bis 25 sind fachspezifisch angelegt.

Überfachliche Grundsätze:

- 1) Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
- 2) Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Schüler/innen.
- 3) Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
- 4) Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
- 5) Die Schüler/innen erreichen einen Lernzuwachs.
- 6) Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler/innen.
- 7) Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern/innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
- 8) Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler/innen.
- 9) Die Schüler/innen erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
- 10) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
- 11) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
- 12) Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
- 13) Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
- 14) Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
- 15) Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schülerinnen und Schülern.

Fachliche Grundsätze:

- 16) Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
- 17) Der Unterricht ermutigt die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen. Lernende dürfen in explorativen oder kreativen Arbeitsphasen zunächst intuitive Formulierungen verwenden. In weiteren Phasen des Unterrichts werden sie dazu angehalten, die intuitiven Formulierungen zunehmend durch Fachsprache zu ersetzen.
- 18) Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.

- 19) Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.
- 20) Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
- 21) Durch regelmäßiges, produktives und wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“. Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen folgt konsequent dem Spiralprinzip. Grundlegende mathematische Kompetenzen auch aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben (z. B. Bruchrechnung, Prozentrechnung, Darstellungswechsel, Anteilsvorstellungen, Umgang mit Einheiten) werden regelmäßig im Unterricht wiederholt und durch Kopfübungen, vernetzte Aufgaben etc. gefestigt.
- 22) Binnendifferenzierung ist ein grundlegendes Prinzip im Mathematikunterricht. Die Lehrkräfte setzen hierzu differenzierende Materialien (z. B. Blütenaufgaben) und Hilfen ein, variieren die Rollen der Lernenden und nutzen kooperative Lernformen. Dabei werden sowohl fordernde als auch fördernde Aufgabenvariationen und Methoden eingesetzt. Lerntempo, Leistungsniveau und Lerntyp der Schülerinnen und Schüler finden entsprechende Berücksichtigung
- 23) Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
- 24) Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.
- 25) Digitale Medien werden regelmäßig dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen.
- 26) Klassenarbeiten enthalten zunehmend auch hilfsmittelfreie Teile, auch mit Blick auf die Klausurformate in der gymnasialen Oberstufe.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOST sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Verbindliche Absprachen

- (1) Die Aufgaben für Klausuren in parallelen Grund- bzw. Leistungskursen werden im Vorfeld abgesprochen und nach Möglichkeit gemeinsam gestellt.
- (2) Klausuren können nach entsprechender Wiederholung im Unterricht auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern.
- (3) Mindestens eine Klausur je Schuljahr in der E-Phase sowie in Grund- und Leistungskursen der Q-Phase enthält einen „hilfsmittelfreien“ Teil.
- (4) Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).

(5) Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs verwendet. Diese sind mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen. In den ersten Klausuren in EF und Q1 kann die Operatorenliste den Schülerinnen und Schülern auch während der Klausuren zur Verfügung gestellt werden.

(6) Schülerinnen und Schülern wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z. B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes ...) selbstständig vorzutragen.

(7) Sofern schriftliche Übungen (20 Minuten als Kompetenzüberprüfung bezüglich des unmittelbar zurückliegenden Unterrichtsvorhabens) gestellt werden sollen, verständigen sich dazu die Fachlehrkräfte paralleler Kurse und verfahren in diesen gleichartig.

Empfehlungen

(1) Die Korrektur und Bewertung der Klausuren kann anhand eines kriterienorientierten Bewertungsboogens, den die Schülerinnen und Schüler als Rückmeldung erhalten, erfolgen.

Verbindliche Instrumente zur Leistungsüberprüfung

In der Sekundarstufe II werden Klausuren in folgendem Umfang geschrieben:

Jahrgangsstufe	EF	Q1.1	Q1.2	Q2.1	Q2.2
Anzahl	4	2	2	2	LK: 1 GK: evtl. 1 (A3-Fach)
Unterrichtsstunden	2 (Zentrale Klausur: 100 Minuten)	GK: 2 LK: 3	GK: 3 LK: 4	GK: 4 LK: 5	GK: 255 Minuten LK: 300 Minuten

In der Einführungsphase ist die vierte Klausur die **zentrale Klausur** am Ende der Einführungsphase. Diese Klausur dient der Standardsicherung am Ende der Einführungsphase und gibt im Hinblick auf die Anforderungen in der Qualifikationsphase Rückmeldungen hinsichtlich der erreichten Leistungen.

Im zweiten Halbjahr der Q1 kann die erste der beiden Klausuren sowohl im Grund- als auch im Leistungskurs durch eine **Facharbeit** ersetzt werden. In diesem Fall wird die Facharbeitsnote wie eine Klausurnote gewertet.

In Q2.2 ist die Klausur bzgl. Dauer und inhaltlicher Gestaltung unter **Abiturbedingungen** zu stellen. Inhaltlich bezieht sich diese nach APO-GOST (VV zu §14) auf den Unterricht des vorangegangenen Kursabschnitts.

Die Termine und Leistungsanforderungen der schriftlichen Klausuren werden den Schülerinnen und Schülern rechtzeitig mitgeteilt. Der Themenschwerpunkt bezieht sich auf den vorangegangenen Unterricht.

Überprüfung der sonstigen Leistungen im Unterricht

In die Bewertung der sonstigen Mitarbeit fließen folgende Aspekte ein, die den Schülerinnen und Schülern bekanntgegeben werden müssen:

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Quantität und Kontinuität)
- Qualität der Beiträge (inhaltlich und methodisch)
- Eingehen auf Beiträge und Argumentationen von Mitschülerinnen und -schülern, Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit neuen Problemen, Beteiligung bei der Suche nach neuen Lösungswegen
- Selbstständigkeit im Umgang mit der Arbeit
- Umgang mit Arbeitsaufträgen (Hausaufgaben, Unterrichtsaufgaben...)
- Anstrengungsbereitschaft und Konzentration auf die Arbeit
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen
- Darstellungsleistung bei Referaten oder Plakaten und beim Vortrag von Lösungswegen
- Ergebnisse schriftlicher Übungen
- Erstellen von Protokollen
- Anfertigen zusätzlicher Arbeiten, z. B. eigenständige Ausarbeitungen im Rahmen binnendifferenzierender Maßnahmen, Erstellung von Computerprogrammen

Bei der Arbeit in Gruppen muss eine individuelle Bewertung möglich sein.

Übergeordnete Kriterien

Leistungsüberprüfungen und -bewertungen geben den Schülerinnen und Schülern Rückmeldung über den erreichten Kompetenzstand und individuellen Lernfortschritt.

Dabei werden sowohl die inhaltlichen Aspekte der Bereiche Analysis, lineare Algebra und analytische Geometrie und Stochastik berücksichtigt als auch die prozessbezogenen Kompetenzen.

In den beiden Beurteilungsbereichen „Klausuren“ und „sonstige Mitarbeit“ wird jeweils eine Note gebildet. Die Zeugnisnote setzt sich aus diesen beiden Bereichsnoten zusammen. Dabei kommt dem Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ der gleiche Stellenwert zu wie dem Beurteilungsbereich „Klausuren“.

Konkretisierte Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung

Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren erfolgt über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind. Dabei sind in der Qualifikationsphase alle Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet.

Die Zuordnung der Hilfspunktschritte zu den Notenstufen orientiert sich in der Einführungsphase an der zentralen Klausur und in der Qualifikationsphase am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend soll bei Erreichen von ca. 45% der Hilfspunkte erteilt werden. Von den genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden, wenn sich z. B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Hilfspunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizontes abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung (APO-GOST §13 (2)) angemessen erscheint.

Konkretisierte Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schülerin bzw. des Schülers zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht:

Leistungsaspekt	Anforderungen für eine	
	gute Leistung	ausreichende Leistung
	Die Schülerin / der Schüler...	
Qualität der Unterrichtsbeiträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung.	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen.
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für eigene Beiträge.	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen.
	kann eigene Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen.	kann eigene Ergebnisse nur auf eine Art darstellen.
Kontinuität / Quantität	Beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch.	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil.
Selbstständigkeit	Bringt sich von sich aus in den Unterricht ein.	beteiligt sich gelegentlich eigenständig am Unterricht.
	Ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig.	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf.
	Strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen.	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, erfragt diese aber nur selten.
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig.	erarbeitet bereitgestellte Materialien eher lückenhaft.
Hausaufgaben	erledigt sorgfältig und vollständig die Hausaufgaben.	erledigt die Hausaufgaben weitgehend vollständig, aber teilweise oberflächlich.
	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor.	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig.
Kooperation	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen- / Partnerarbeit ein.	bringt sich nur wenig in die Gruppen- / Partnerarbeit ein.
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge Anderer.	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig, stört aber nicht.

Gebrauch der Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachangemessen an und kann ihre Bedeutung erklären.	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachangemessen anwenden.
Werkzeuggebrauch	setzt Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein.	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben.
Präsentation / Referate	präsentiert vollständig, strukturiert und gut nachvollziehbar.	präsentiert an mehreren Stellen eher oberflächlich, die Präsentation weist Verständnislücken auf.
Schriftliche Übung	erreicht ca. 75% der maximal erreichbaren Punktzahl.	erreicht ca. 45% der maximal erreichbaren Punktzahl.

Grundsätze der Leistungsrückmeldung und Beratung

Für Präsentationen, Arbeitsprotokolle, Dokumentationen und andere **Lernprodukte der sonstigen Mitarbeit** erfolgt eine Leistungsrückmeldung, bei der inhalts- und darstellungsbezogene Kriterien angesprochen werden. Hier werden zentrale Stärken als auch Optimierungsperspektiven für jede Schülerin bzw. jeden Schüler hervorgehoben.

Die Leistungsrückmeldungen bezogen auf die **mündliche Mitarbeit** erfolgen auf Nachfrage der Schülerinnen und Schüler außerhalb der Unterrichtszeit, spätestens aber in Form von mündlichem Quartalsfeedback oder Eltern-/Schülersprechtagen. Auch hier erfolgt eine individuelle Beratung im Hinblick auf Stärken und Verbesserungsperspektiven.

2.4 Lehr- und Lernmittel

In der Einführungsphase wie auch in der Qualifikationsphase wird das Lehrwerk *Lambacher Schweizer – Mathematik* von Klett eingesetzt. Die Lehrwerke der Sekundarstufe II werden den Schülerinnen und Schülern in digitaler Form für ihre von der Schule ausgeliehenen iPads zur Verfügung gestellt. Als Formelsammlung wird das vom Land bereitgestellte *Dokument mit mathematischen Formeln* (<https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/zentralabiturgost/faecher/getfile.php?file=5705>) genutzt.

Zur eigenständigen Vor- und Nachbereitung der mathematischen Inhalte stehen den Schülerinnen und Schülern in der Schülerbibliothek die im Unterricht genutzten Lehrwerke, sowie auch die Lehrwerke anderer Verlage, und weitere Nachschlagewerke zur Verfügung. Im Förderraum der Schule sind vielfältige Fördermaterialien zum eigenständigen Arbeiten vorhanden.

Werkzeuge im Mathematikunterricht

Neben der Einführung klassischer mathematischer Werkzeuge wie Zirkel und Geodreieck werden im Laufe der Sekundarstufe I bereits folgende elektronische Werkzeuge eingeführt:

- (1) Wissenschaftlicher Taschenrechner zu Beginn der Jahrgangsstufe 7
- (2) GeoGebra Rechner Suite als App für das iPad; Nutzung als dynamische Geometriesoftware und Funktionenplotter
- (3) Tabellenkalkulation: Excel



Ab der Einführungsphase wird GeoGebra zunehmend als Modulares Mathematiksystem (MMS) und damit als zugelassenes Hilfsmittel für den zweiten Teil der Klausuren von den Schülerinnen und Schülern genutzt.

3. Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans

Der schulinterne Lehrplan ist als „dynamisches Dokument“ zu sehen, dessen Aktualität stetig überprüft wird. Das vorliegende schulinterne Curriculum (siehe 2.1) ist zunächst bis 2027 für den ersten Durchgang durch die gymnasiale Oberstufe nach Erlass des Kernlehrplanes verbindlich.

Jeweils vor Beginn eines neuen Schuljahres, d.h. erstmalig nach Ende der Einführungsphase im Sommer 2025 werden in einer Sitzung der Fachkonferenz für die nachfolgenden Jahrgänge zwingend erforderlich erscheinende Veränderungen diskutiert und ggf. beschlossen, um erkannten und zuvor möglicherweise ungünstigen Entscheidungen schnellstmöglich entgegenwirken zu können. Zudem soll hier auf die zur Orientierung festgelegte Anzahl an Stunden für die einzelnen Unterrichtsvorhaben geachtet werden, da diese vor dem ersten Durchlauf der Einführungsphase nur eine grobe Schätzung darstellen kann.

Diskrepanzen, die einer Lehrkraft bereits während eines Schuljahres auffallen, werden in einem zentralen, für alle Lehrkräfte der Mathematik zugänglichen Dokument auf IServ gesammelt und als Grundlage des Austausches innerhalb der Fachkonferenz herangezogen.

Nach Abschluss des Abiturs 2027 wird eine Arbeitsgruppe aus den zu diesem Zeitpunkt in der gymnasialen Oberstufe unterrichtenden Lehrkräften auf der Grundlage ihrer Unterrichtserfahrungen eine Gesamtsicht des schulinternen Curriculums vornehmen und eine Beschlussvorlage für die erste Fachkonferenz des folgenden Schuljahres erstellen.